

TEMA 3

PENTRU CURSUL DE ALGEBRĂ, SERIA 10

Rezolvă problemele următoare, apoi încearcă să le redactezi cât mai explicit. În acordarea punctajului, vor conta atât corectitudinea rezolvării, cât și calitatea redactării. De această dată, includerea ciornelor sau încercărilor de rezolvare nu mai este obligatorie.

Aceasta este o temă **individuală**: copierea soluțiilor de la alți colegi poate fi penalizată.

Termen limită de predare: luni, 9.01.2012, ora 9:00.

1. Fie $A = (a_{ij})$ o matrice pătratică, de ordinul 4.

- Determină cu ce semn apare în $\det(A)$ termenul $a_{1,2} \cdot a_{3,4} \cdot a_{2,3} \cdot a_{4,1}$. Este necesar să aplici definiția determinantului!
- Scris dezvoltarea determinantului acestei matrice după a doua linie.

2. Fie $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$ o matrice cu elemente din corpul \mathbf{Z}_5 .

- Calculează $\det(A)$.
- Justifică dacă matricea A este inversabilă. În caz afirmativ, calculează A^{-1} .

3. Calculează rangul matricelor A , respectiv A^2 , unde $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. Propune și rezolvă apoi o problemă de același fel.

4. Fie A și B matrice pătratice de ordinul n cu elemente reale, cu proprietatea că $AB = BA$. Arată că

$$\det(A^2 + B^2) \geq 0.$$

5. Spunem că o succesiune de morfisme de K -spații vectoriale $V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3$ este un *șir exact* dacă $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$. Să presupunem că

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ V & \xrightarrow{p} & W & \xrightarrow{q} & T \end{array}$$

este o diagramă de morfisme de K -spații vectoriale, în care liniile orizontale sunt șiruri exacte, iar pătratele sunt *comutative* (de exemplu, comutativitatea primului pătrat înseamnă $po f = g ou$).

- Arată că dacă f , h și p sunt injective, atunci g este injectiv.
- Formulează și demonstrează un rezultat analog celui de la punctul a), despre aceeași diagramă.